Examen. Doble Grado en Ing. Inf. y Mat. 15/12/2022

2 puntos

① Demuestra que el espacio normado

$$X = \{ f \in C^1[a,b] : f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \}, \quad \|f\| = \left(\int_a^b |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

es un espacio prehilbertiano.

2 puntos

② Demuestra que ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, con la norma habitual, es un espacio prehilbertiano si y solamente si $p = 2$

3 puntos

③ Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de Cauchy en un espacio prehilbertiano H con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Prueba que la sucesión de números reales $(\langle x_n, y_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{R}$.

2 puntos

④ a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(a,b) = \int_0^1 |\operatorname{sen}(3x) - a \operatorname{sen}(x) - b \operatorname{sen}(2x)|^2 dx$$

Demuestra que f tiene un único mínimo global (a_0, b_0), es decir existe un único $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $f(a_0, b_0) \leq f(a,b)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1 punto

b) Escribe, razonadamente, el sistema lineal 2×2 que debe satisfacer (a_0, b_0) (no es necesario resolver el sistema)

SOLUCIONES

① La norma deriva del producto escalar:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{Z}} = \int_a^b f'(t)\, g'(t)\, dt$$

② $1 \leq p < +\infty$

Para $p=2$ la norma deriva del producto escalar

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

Si $p \neq 2$, la i. paralelogramo para $e^1 = (1,0,0,\dots)$
$e^2 = (0,1,0,0,\dots)$

¿ $\|e_1+e_2\|_p^2 + \|e_1-e_2\|_p^2 = 2\left(\|e_1\|_p^2 + \|e_2\|_p^2\right)$ (*)

$\|e_1\| = \sqrt[p]{1^p} = 1$, $\|e_2\| = 1$

$\|e_1+e_2\| = \sqrt[p]{1^p+1^p} = \sqrt[p]{2} = 2^{1/p}$, $\|e_1+e_2\|^2 = 2^{2/p}$

$\|e_1-e_2\|^2 = 2^{2/p}$

Volvemos a (*) ¿ $\cancel{2}\, 2^{2/p} = \cancel{2}\,(2)$? ¿ $2^{2/p} = 2$?
$\Updownarrow$
$p=2$

Conclusión, $1 \leq p < 2$, $p \neq 2 \Rightarrow$ No se verifica la I. Paralelo.
$\Downarrow$
l_p no es prehilbertiano.

¿$p=+\infty$? Tomamos los mismos vectores de antes:

$$\|e_1+e_2\|=1 \quad , \quad \|e_1-e_2\|=1, \quad \|e_1\|=\|e_2\|=1$$

Volvemos a (*):

$$\|e_1+e_2\|^2+\|e_1-e_2\|^2 = 1+1=2$$

$$2\left(\|e_1\|^2+\|e_2\|^2\right) = 2\,(1+1)=4$$ } No se verifica.

③ Probemos que $(\langle x_n, y_n\rangle)$ es de Cauchy:

$$|\langle x_{n+p}, y_{n+p}\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| =$$

$$= |\langle x_{n+p}, y_{n+p}\rangle - \langle x_{n+p}, y_n\rangle + \langle x_{n+p}, y_n\rangle - \langle x_n, y_n\rangle|$$

$$\leq |\langle x_{n+p}, y_{n+p}-y_n\rangle| + |\langle x_{n+p}-x_n, y_n\rangle| \overset{C-S}{\leq}$$

$$\leq \|x_{n+p}\|\,\|y_{n+p}-y_n\| + \|x_{n+p}-x_n\|\,\|y_n\| \leq$$

$$M\|y_{n+p}-y_n\| + M\|x_{n+p}-x_n\|, \qquad (**)$$

donde M es una cota de $\|(x_n)\|$ y M una cota de $\|y_n\|$ (Toda sucesión de Cauchy es acotada).

④ $$f(a,b) = \|\operatorname{sen}(3x) - (a\operatorname{sen}(x) + b\operatorname{sen}(2x))\|^2_{L^2(a,b)}$$

$= d^2_{ist}\left(\operatorname{sen}(3x) - (a\operatorname{sen}(x) + b\operatorname{sen}(2x))\right)$ en $L^2(a,b)$

Los puntos donde la función anterior alcanza su mínimo son los mismos donde se alcanza el mínimo de d.

$\underbrace{H = L^2(a,b)}_{\text{Hilbert}}$, $\underbrace{M = \langle \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x) \rangle}_{\text{sub. cerrado, pues es de dim finita}}$

Aplicando el T. P. ortogonal

$\exists!\, (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(a_0, b_0) \leq f(a,b), \ \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

Además (a_0, b_0) se caracteriza por:

$$\operatorname{sen}(3x) - a_0 \operatorname{sen}(x) - b_0 \operatorname{sen}(2x) \in M^{\perp}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b \left[\operatorname{sen}(3x) - a_0 \operatorname{sen}(x) - b_0 \operatorname{sen}(2x)\right] \operatorname{sen}(x)\, dx = 0 \\ &\int_a^b \left[\operatorname{sen}(3x) - a_0 \operatorname{sen}(x) - b_0 \operatorname{sen}(2x)\right] \operatorname{sen}(2x)\, dx = 0 \end{aligned}\right\}$$

que es el sistema requerido.